# 三角形を考えて大学の幾何から高校の幾何を眺めてみよう

城西大学理学部数学科　神島芳宣

## 1　目的

この講義は 2016 年 5 月 29 日城西大学オープンキャンパス模擬授業 (1 号館 4 階 406 教室 参加者 (高校生・保護者) および 2016 年 7 月 13 日城西大学開催の大学見学会 (1 号館 4 階 406 教室　参加者 (城西大学附属城西高等学校 1 年生) に対して講義したものに基づく.

最近の高校の幾何授業の特徴の一つに合同, 相似, 作図などの図形をとらえることから離れて, 三角形の辺の長さ, 角度あるいはベクトルとの関係（公式）を使った計算が主流となっていることがある.

まず講義の初めに三角形の内角の和は 180 度を既成事実として無意識に受け止めているが,「地球上の大きな三角形 (球面三角形)」を直観的に想像させて, 「本当にそうなのだろうか？」という問いを高校生に向けた. 結果, （自由討論なので) 様々な答えと宇宙単位で物を測ると何か 180 度という意味が違うような気がすると漠然に思う学生がでてきたところで, 講義の目的を高校で学ぶ幾何の中に潜んでいる**公理**という概念に焦点を当て, 三角形の内角の和を通して, 「計算ではない」幾何学の論理構成を説明しようと試みた.

## 2　事の起こりは Euclid 幾何学

ユークリッド (エウクレイデス 325 BC-265 BC) が 2000 年以上も前に世に出て以来, 第 5 公準 (The fifth postulate) －平行線に関する命題－は絶えず問題視され, 結局 19 世紀になって, それは (まさにユークリッド幾何学を規定する) 平行線の公理と訂正された. 第 5 公準とは『一つの直線 $\ell$ が二つの直線 $m, n$ と交わっているとする. 同じ側にある交点での内角の和 $\alpha+\beta$ が二直角 $(=\pi)$ より小さいとき, 直線 $m, n$ は交点の内角のある側において交わる』
というものである. これを仮定すると次が出る.

**命題 2.1**　平行な二直線に一直線が交わって出来る**錯角**は互いに等しい. 特に, 直線 $m$ とその上にない定点 $P$ を通る $m$ と平行な直線はただ一本しかない.

**証明.** 直線 $\ell$ に平行な直線 $m, n$ が交わってできる内角を $\alpha$ と $\gamma$ とし, 錯角の位置にあったとする. $\alpha\neq\gamma$ と仮定し, $\alpha<\gamma$ であったとして一般性を失わない. 直線 $n$ において, $\gamma$ の補角を $\beta$ $(\gamma+\beta=\pi)$ とする. したがって, $\alpha+\beta<\pi=\gamma+\beta$ となり, 第 5 公準の主張と矛盾する. ゆえに錯角は相等しい. 次に前の記号をそのまま用いて, $P$ が $\ell$ 上にあったとし, $\ell$ が $n$ と交わる点を $Q$ とする. もし $P$ を通って $n$ と平行な直線が 2 本 $m, m'$ あったとする. 錯角は相等しいことを示したから, 点 $Q$ での角 $\gamma$ と錯角の位置にあるのは直線 $m$ に対しては点 $P$ での角 $\alpha$, 直線 $m'$ に対しては点 $P$ での角 $\alpha'$ であり, $\gamma=\alpha$, $\gamma=\alpha'$ となる. したがって, $\alpha=\alpha'$. これは線分 $Pm$, $Pm'$ が重なる (一本) に他ならない. **証明終.**

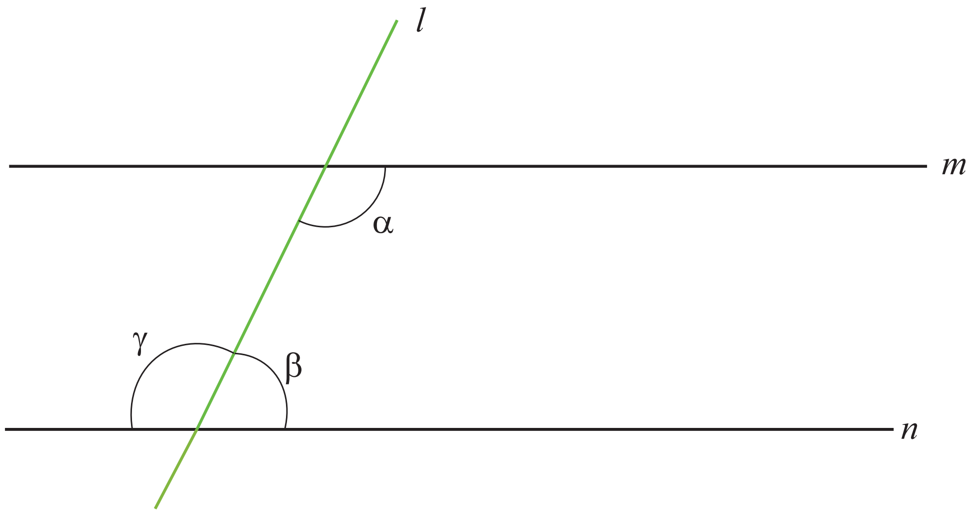


図 1

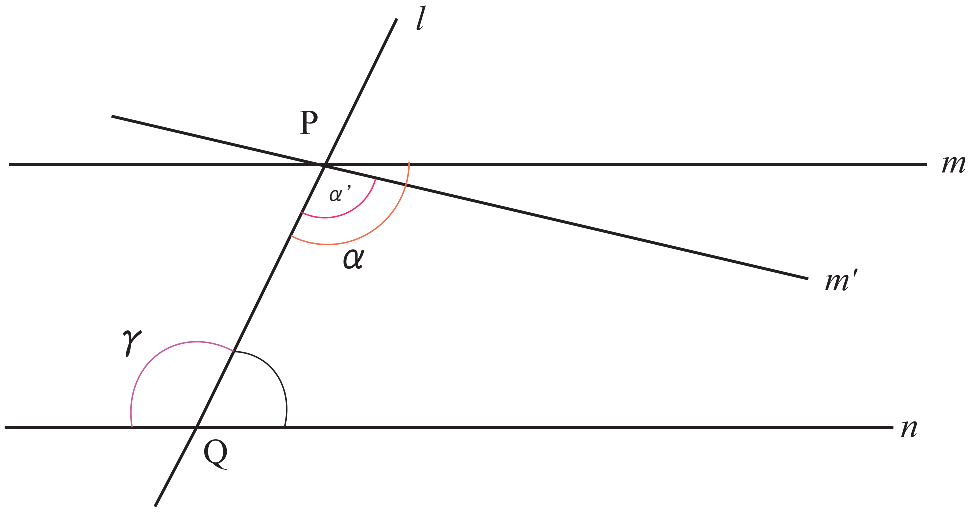


図 2

これを使って, 次の命題を示す.

**命題 2.2**　第 5 公準を仮定すると, 三角形の内角の和は二直角である.

**証明.** 三角形 $\triangle ABC$ をとってきて辺 $BC$ を通る直線を $n$, 点 $A$ を通る $n$ と平行な直線を $m$, 辺 $AB$ を通る直線を $\ell$ とする.（このことは可能である. [1] 参照.）頂点 $A, B, C$ の周りの内角を $\alpha, \beta, \gamma$ とする. $A$ において $m$ と $AC$ がつくる角を $X$, $A$ において $m$ と $AB$ がつくる角を $Y$ とお

く．このとき,

(1) $X+Y+\alpha=\pi$. (直線 $m$ を形成)

命題 2.1 を仮定しているので, 錯角は等しいから

(2) $Y=\beta,\quad X=\gamma$.

(2) の値をを (1) に代入して $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ がなりたつ. **証明終.**

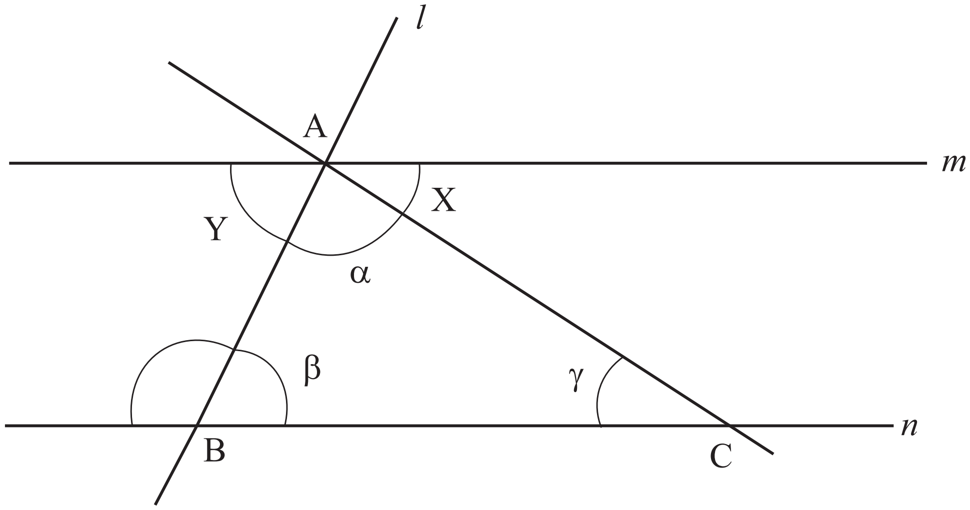


図 3

逆に

**命題 2.3** 「任意の三角形の内角の和が $\pi$」ならば第 5 公準が成り立つ.

**証明.** 直線 $\ell$ が二直線 $m,n$ と交わってできる交点 $P,Q$ での内角をそれぞれ $\alpha,\beta$ $(=\angle PQm)$ とし,

(1) $\alpha+\beta<\pi$ と仮定する.

自然数 $k$ をとり, $Q$ から直線 $m$ に向かって線分を引き, その交点を $R_k$ とする. (このことは可能であることは示される (パップスの公理).) 角度 $\beta_k=\angle PQR_k$ は $0\le\beta_k\le\beta$ であって, 点 $R_k$ を $P$ から遠ざかるようにとっていくとき, 実数列 $\{\beta_k\}$ は単調増大である; $\cdots<\beta_k<\beta_{k+1}<\cdots$. (特に $k{\to}\infty$ のとき, $\beta_k{\to}\beta$ である.)

各 $k$ に対し三角形 $\triangle PQR_k$ の内角を $\angle QR_kP=\gamma_k$ とおけば, その内角の和は仮定より $\pi$ であるから

(2) $\alpha+\beta_k+\gamma_k=\pi$

である. $\{\beta_k\}$ が単調増大なので, この等式から $0\le\cdots<\gamma_{k+1}<\gamma_k<\cdots<\gamma_1$, つまり数列 $\{\gamma_k\}$ は下に有界な単調減少列である. ここで**連続性公理** * を適用すると極限 $\gamma$ が存在して $\lim_{k\to\infty}\gamma_k=\gamma$ となる. 上の式 (2) の両辺に対して極限をとると, 右辺は $k$ に無関係だから

$$\lim_{k\to\infty}\alpha+\beta_k+\gamma_k=\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

が成り立つ. ここで $\gamma\neq0$ である, なぜなら $\gamma=0$ とすると $\alpha+\beta=\pi$ となり, (1) に反する.

一方, 直線 $m$ 上の点列 $\{R_k\}$ が直線 $m$ 上の一つの点に収束しないとすれば $\angle QR_kP = \gamma_k \to 0$ となる, つまり $\gamma = 0$ となってしまうので上のことに反する. ゆえに $\{R_k\}$ が（$n$ 上に）極限 $R$ をもつ. (正確には $\{R_n\}$ の部分列で収束するものが存在するということ.) このとき三角形 $\triangle PQR$ は $\lim_{k\to\infty} \angle QR_kP = \angle QRP = \gamma$ から, 内角がそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma$ である. したがって, 仮定から点 $Q$ において線分 $PQ$ ($\subset \ell$) と直線 $n$ が交わる角が $\beta$ であったが, 点 $Q$ において線分 $PQ$ と線分 $QR$ が交わる角も $\pi - (\alpha + \gamma) = \beta$ である. このことは線分 $QR$ が直線 $n$ の一部であること意味する, したがって直線 $m, n$ は $R$ で交わる. ゆえに第 5 公準が示された. **証明終.**

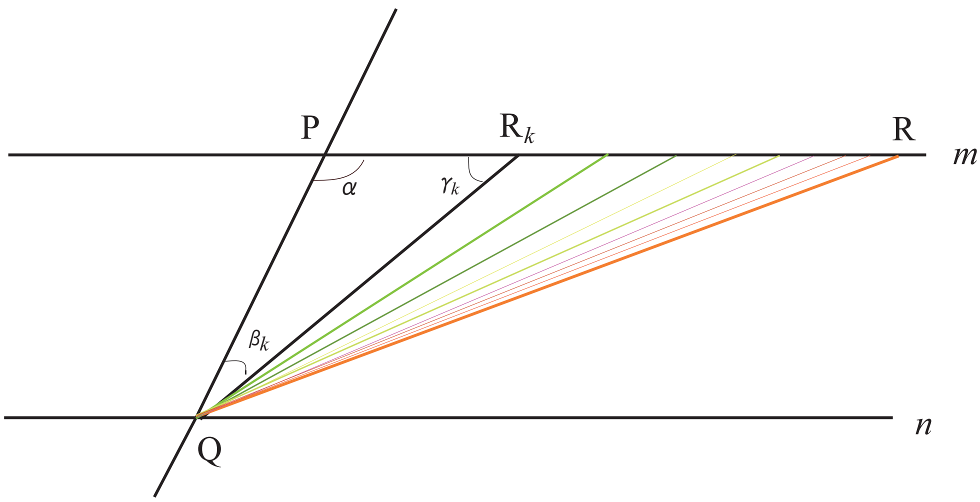


図 4

従って, 「任意の三角形の内角の和が $\pi$」(命題 2.2) と第 5 公準は同値であることが結論された.

備考: 上記の**実数の連続性公理** * はデデキント (R. Dedekind (1831-1916)) の有理数の切断による実数の公理のこととする (1871 年). そのとき次の二つの定理と同値であることが知られている.

(i) Weierstrass の上限・下限定理

(ii) 有界単調数列の定理『上 ( 下 ) に有界な単調増大 ( 減少 ) 数列は収束する』

注意: ここで下の二つは定理と書いてあるが, 例えば (ii) を公理として最初にもって来ると, 他の三つはそれより証明されるので定理と言い換えることもできる. [2] 参照. (この部分は高校の範囲を超えているので特に講義では説明はしなかった.)

## 3　19 世紀の数学の転換

命題 2.3=命題 2.2 において, 第 5 公準を**仮定**するとしているが, これは正しくないのだろうか (証明できないものだろうか).

まず, **直線**, **平行**などは直観的で不思議な感じはしない. しかし, 黒板は平坦であるが凸凹した面

にある線 (分) はもはや直線とは言えない．黒板にある直線の概念を一般の面（曲面）の上に拡張するならば, 黒板の 2 点を結ぶ線分（直線の一部) はその 2 点間の最短線（最短距離) であるから, 曲面上の 2 点を結ぶ曲線を**その曲面における直線**と呼ぶには, その曲面上の 2 点間の**最短距離**として定義することが自然である．例えば, 地球の表面を曲面とするとき, 2 地点東京とニューヨークを結ぶ最短線は飛行機が飛ぶとき（速度一定として) 一番飛行時間が短い (燃料の消費量が少ない) ルートである．経験的に東京－ニューヨーク間の最短線は東京から北極のほうに向かって飛びニューヨークに向かって南下するものと知っている．地図上では東京-ニューヨーク間は太平洋上をハワイを横切ってサンフランシスコ, ニューヨークへ到着が明らかに最短である．この視覚的違いは**直線（最短線）**はそれが住んでいる**器**によって決まり, 平面（地図）では, 本当に**直線**であり, そして球面 (地球の表面) では**子午線**を意味する．

次に直線が平行とは, 次のように理解するのは自然である．『**二つの直線が平行とはそれらが住んでいる曲面の中で永久に交点を持たないことを言う.**』

直線に対し, 自然に (命題 2.1 のように）一つの直線とその上にない点を通る (1) 平行な直線はただ一本しかない．それ以外は (2) 平行な直線は全く存在しない．(3) 平行な直線は沢山 (無数) に存在する．この条件を満たすべき三つの**器** (曲面) があることは自然に考えられる．すでに (1) は平面が器である．(2) の器は球面である．なぜなら, 二つの任意の子午線は必ず 2 点で交わる．つまり定義より, 球面には平行線が存在しない．さらに, 三つの子午線（北極から赤道の南への子午線, 北極から赤道の東の子午線, 東から南にむかう赤道（子午線)）によって囲まれた三角形の内角の和は 270 度である．このような三角形を球面三角形という．この前提の下で三つの幾何学とは

(1) 平面の幾何学　このとき, 三角形の内角の和は 180 度（命題 2.2）.
(2) 球面の幾何学　このとき, 三角形の内角の和は 180 度より**大きい**.
(3) 双曲面の幾何学　このとき, 三角形の内角の和は 180 度より**小さい**.

直線の平行性が示すように, これらの三つの幾何学は互いに独立で, 共有しあうことはない．（一人の人間が同時にこの三つの世界に住むことはできない.）つまり, (1), (2), (3) の約束のもとで, 独立に幾何学が生まれる．(1), (2), (3) をそれぞれ一つの独立した**公理**という．それぞれの幾何において統一して直線, 三角形という用語を使っているが, ユークリッド幾何以外では直線はまっすぐな線には見えない．それは我々が住んでいる世界には存在し得ない非ユークリッド的図形を無理に我々の空間, 平面 (=ユークリッド幾何) の上に描いているからである．ユークリッド幾何の直線は 2 点を結ぶ最短線として解釈できることを一般化して, ユークリッド幾何以外では最短線を測地線と呼んで, 直線のこととする．（もちろん, それぞれの幾何において距離と言うものが予め与えられている前提の下での話である.)

## 3.1　三つの 2 次元幾何学 (まとめ)

具体的な例をみるとき, 2 次元の幾何学は三つの幾何に分類される．定線を $\ell$ とし, その上にない点を $p$ とする．

| 幾何学 | 平行線公理 | 三角形の内角の和 |
|---|---|---|
| ユークリッド幾何 $\mathbb{R}^2$<br>(ユークリッド) | $p$ を通り $\ell$ と交わらない直線がただ一本存在 | $\pi$ |
| 双曲幾何<br>$H^1_{\mathbb{C}}$ (ロバチェフスキー )<br>$H^2_{\mathbb{R}}$ (ボヤイ) | $p$ を通り $\ell$ と交わらない直線が無数に存在 | $\pi$ より小 |
| 球面幾何<br>(リーマン) | $p$ を通り $\ell$ と交わらない直線は存在しない | $\pi$ より大 |

## 4　結びと総括

この講義では目に見える図形として三角形をとり, 内角の和 180 度という常識を非ユークリッド幾何を用いて否定した. 高校では公式を暗記し, 計算するという方向が定着している. 筆者はパターン化された物事をより柔軟に数学は自由に扱うことができるということを高校生に伝えたかった. 参加者は入試にはでないという安心感のもとに, こういう数学もあるのかという半信半疑ではあるがポジティブな印象であった. 初等幾何を見直そうという動きがある中で, 高校生が将来数学でダイナミックな発想を生み出す力をもつようになればよいと感じた. 中には (1) 一次元の幾何学もありますか. (2) 球面幾何の三角形にも双曲幾何の三角形にも正弦定理とか余弦定理とかはあるのですか – という疑問がもつ学生がいたことは大変有意義であった.

## 参考文献


[1] 小林昭七, ‘ユークロッド幾何から現代幾何へ,’ 日本評論社, 1990.

[2] 吉田洋一・赤摂也,‘数学序説,’ 培風館, 1961.


(2017 年 2 月 提出)